

1. Berapakah medan listrik yang berkaitan dengan suatu berkas sinar laser yang mempunyai kerapatan energi 10^6 joule/cm³?

JAWAB:

Densitas energi laser yang dikaitkan/dihubungkan dengan medan listrik E (*peak value*) adalah:

$F = m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{eV \cdot B}{c}$ di mana dari persamaan ini kita akan memperoleh

$$E = \sqrt{8\pi \times 10^{13}} = 1,6 \times 10^7 \text{ cgs units}$$

$$E = 4,8 \times 10^{11} \frac{\text{volt}}{\text{meter}}$$

2. Bagaimanakah hubungan antara R, L, dan C untuk *critical damping* pada suatu rangkaian LRC seri?

JAWAB:

Persamaan rangkaian adalah $L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0$. Diferensialkanlah persamaan ini terhadap t , kita

peroleh: $L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$. Solusi persamaan diferensial ini adalah $I = A_0 e^{-i\delta t}$ dan disubstitusi ke

persamaan diferensial awal, diperoleh: $L\delta^2 + iR\delta - \frac{1}{C} = 0$ Solusi untuk δ adalah

$$\delta = \frac{-iR \pm \sqrt{(-R)^2 + 4 \frac{L}{C}}}{2L}. \text{ Kondisi untuk } \textit{critical damping} \text{ adalah } R^2 - \frac{4L}{C} = 0.$$

3. Misalkan sebuah elektron bergetar dalam potensial gerak harmonis sederhana dengan frekuensi angular ω_0 dan amplitudo $A = 10^{-8}$ cm. (a) Hitunglah energi yang diradiasikan per siklusnya! (b) Berapakah rasio antara energi yang diradiasikan per siklus dan energi mekanis rata-rata? (c) Berapa lama waktu yang diperlukan oleh sistem untuk memancarkan setengah dari energinya?

JAWAB:

Misalkan, $x = A \sin \omega t$(1)

Energi dari elektron yang bergetar/berosilasi dan bermassa m adalah

$$E = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2, \text{ di mana dari persamaan ini kita memperoleh } A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \dots\dots\dots(2)$$

Laju energi yang dipancarkan adalah $\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3c^2} e^2 a^2 \dots\dots\dots(3)$

di mana $a = -A\omega^2 \sin \omega t$. Dengan mensubstitusi (2) ke dalam (3) dan mencari rata-rata dalam 1

periode getaran, kita memperoleh: $\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{1}{2} \omega^4 \frac{2E}{m\omega^2} = -\frac{2}{3} \frac{e^2 E \omega^2}{mc^3} \dots\dots\dots(4)$

Energi elektron sebagai fungsi dari t adalah $E = E_0 \exp\left(-\frac{2e^2 \omega^2}{3mc^3} t\right) \dots\dots\dots(5)$

(a) $\Delta E \approx \Delta t < \frac{2}{3c^2} e^2 a^2 \geq \frac{2\pi}{\omega} \frac{A^2}{3c^3} e^2 \omega^4$

$$= \frac{2\pi A^2 e^2 \omega^3}{3c^3} = \frac{10^{-16} \times 2\pi (4,8)^2 \times 10^{-20} \times 10^{45}}{3 \times 27 \times 10^{30}}$$

$$= 1,8 \times 10^{-21} \text{ ergs} = 1,1 \times 10^{-9} \text{ eV.}$$

(b) Energi mekanik rata-rata dari elektron adalah jumlah dari energi kinetik rata-rata dan energi potensial rata-rata. Kita memperoleh $E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2$, di mana $v = A\omega$ adalah kecepatan maksimum elektron. Rasio/perbandingan energi yang dipancarkan per siklus terhadap energi mekanis

rata-rata adalah: $\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{A^2}{3c^3} e^2 \omega^4 \frac{2}{mA^2 \omega^2} = \frac{4\pi e^2 \omega}{3c^3 m}$

$$= \frac{4\pi \times (4,8)^2 \times 10^{-20} \times 10^{15}}{3 \times 27 \times 10^{30} \times 9,1 \times 10^{-28}}$$

$$= 3,9 \times 10^{-8}.$$

(c) Dengan mengambil $E = \frac{1}{2} E_0$, kita dapat menyelesaikan persamaan (5) untuk waktu τ .

$$\tau = (\ln 2) \frac{3mc^2}{2e^2 \omega^2}$$

$$= \frac{0,69 \times 3 \times 27 \times 10^{30} \times 9,1 \times 10^{-28}}{2 \times (4,8)^2 \times 10^{-20} \times 10^{30}}$$

$$\approx 1,1 \times 10^{-7} \text{ detik.}$$

4. (a) Berapakah energi interaksi antara dua dipol sejajar, yang terpisah oleh jarak d ? Asumsikanlah bahwa suatu vektor yang menghubungkan dua dipol itu tegak lurus terhadap arah momen dipol. (b) Dua bola konduktor, masing-masing berjari-jari R , ditempatkan pada jarak d satu sama lain. Ada medan listrik seragam, \vec{E} , yang tegak lurus garis yang menghubungkan dua bola bermuatan tersebut. Asumsikanlah bahwa $R \ll d$, tentukanlah gaya di antara bola-bola konduktor tersebut!

JAWAB:

- (a) Potensial dari sebuah muatan (muatan tunggal) sebagai fungsi jarak, r adalah

$$V = \frac{q}{r} \dots \dots \dots (1)$$

Diferensiasikan persamaan (1) terhadap $-x$, akan diperoleh potensial dari sebuah dipol yang

arahnya menuju arah sumbu x , $V_d = -\frac{dV}{dx} \Delta x = \frac{xq\Delta x}{r^3} = \frac{P \cos \theta}{r^2}$. Di mana $P = q\Delta x$ adalah

momen dipol. Medan E dari dipol adalah $\vec{E}_d = \frac{P \sin \theta}{r^3} \hat{\theta}_1 + \frac{2P \cos \theta}{r^3} \hat{r}_1$, di mana $\hat{\theta}_1$ dan

\hat{r}_1 adalah vektor-vektor satuan. Energi potensial dari dua dipol sejajar adalah $W = -\vec{P} \cdot \vec{E}_d = \frac{P^2}{d^3}$,

di mana kita telah menggunakan $\theta = 90^\circ$ dan $r = d$.

- (b) Momen dipol dari dua buah bola konduktor yang seragam dalam medan listrik homogen, E , diketahui adalah $R^3 E$, di mana R adalah jari-jari bola. Gaya di antara dua bola konduktor itu

adalah $-\frac{dW}{dr}$, atau $F = (ER^3)^2 \frac{3}{d^4} = \frac{3E^2 R^6}{d^4}$, yang sifatnya menolak (*repulsif*).

5. Pertimbangkanlah sebuah silinder dengan jari-jari a dan panjang L yang terisi secara seragam oleh gas-gas yang terionisasi, dengan densitas muatan ρ , yang bergerak secara sejajar terhadap sumbu silinder dengan kecepatan v . (a) Tentukanlah medan magnet pada jarak r dari sumbu silinder tersebut (Abaikanlah efek pada ujung/*end effects*) (b) Misalkan sebuah berkas sejajar dari proton berenergi tinggi yang bermassa m , kecepatan V' , yang ditembakkan ke dalam silinder tersebut dengan

kecepatan mula-mulanya sejajar terhadap sumbu silinder. Asumsikanlah bahwa L jauh lebih kecil terhadap jarak fokus, dan abaikanlah efek elektrosatitik dan relativistik, hitunglah jarak fokus. (Jarak fokus itu adalah jarak dari salah satu ujung silinder ke titik fokus tertentu).

JAWAB:

(a) Menurut Hukum Ampere $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} I$ di mana I adalah arus bersih yang melewati

permukaan yang didefinisikan oleh kurva tertutup. Dengan menggunakan $I = \rho v \pi r^2$ dan fakta

bahwa B tidak bergantung kepada sudut, kita memperoleh $B(2\pi r) = \frac{4\pi}{c} \rho v \pi r^2$ atau

$$B = \frac{2\pi\rho v r}{c}.$$

(b) Misalkan $\delta = \frac{2\pi\rho v}{c}$. Gaya yang bekerja pada sebuah proton pada jarak $r = y_0$, yang bergerak

dengan kecepatan V' adalah $\iint E_r dA = \frac{\lambda}{\epsilon} \dots\dots\dots(1) \Rightarrow E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$ atau

$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{e\delta}{cm} y_0 V'$. Setelah mengintegrasikan persamaan ini kita memperoleh

$$v_y = -\frac{e\delta}{cm} y_0 V' t \dots\dots\dots(1)$$

dan $\Delta y = -\frac{e\delta}{2cm} y_0 V' t^2 = -\frac{e\delta}{2cm} y_0 V' \left(\frac{L}{V'}\right)^2 = -\frac{e\delta y_0 L^2}{2cV'm}$, yang mana dapat diabaikan bila

dibandingkan dengan y_0 saat $L \ll$ jarak fokus. Arah proton setelah melewati silinder

didefinisikan sebagai $\frac{v_y}{V'} = \frac{y_0}{\text{jarak fokus}} \dots\dots\dots(2)$

Dengan mensubstitusikan persamaan (1) ke dalam persamaan (2) kita memperoleh

$$\text{jarak fokus} = y_0 \left(\frac{cmV'}{e\delta y_0 V' t} \right) = \frac{cm}{e\delta t} = \frac{c^2 m}{e 2\pi\rho v \frac{L}{V'}} = \frac{c^2 m V'}{2\pi\rho v L e} = \left(\frac{c^2 m}{2\pi e \rho L} \right) \frac{V'}{v}$$

menggunakan besaran $t = \frac{L}{V'}$ dan $\delta = \frac{2\pi\rho v}{c}$.

6. Buktikanlah bahwa $\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi\delta(\vec{r})$.

JAWAB:

Misalkan, $f(r) = \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}|}$ dan integrasikanlah terhadap dV , diperoleh $I = \int f(r) dV = \int \nabla^2 \frac{1}{r} dV$

$= \iint_S \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{s}$ (**teorema Gauss**), di mana S adalah permukaan yang melingkupi volume V. Dalam

koordinat bola integral di atas menjadi: $I = -\iint_S \frac{1}{r^2} r^2 d\theta d\phi \sin \theta = -\iint_S d\theta d\phi \sin \theta$

= 0 jika titik $r = 0$ tidak berada di dalam permukaan S

= -4π jika titik $r = 0$ berada di dalam permukaan S

Dapat dilihat bahwa fungsi $f(r)$ memenuhi definisi fungsi yang diperumum $-4\pi\delta(\vec{r})$. Oleh karena

itu, $f(r) = \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi\delta(\vec{r})$(terbukti!!!)

7. Sebuah kapasitor terbuat dari dua buah silinder satu sumbu (konsentris) dengan jari-jari masing-masingnya adalah r_1 dan r_2 ($r_1 < r_2$) dan panjang $L \gg r_2$. Daerah di antara r_1 dan $r_3 = \sqrt{r_1 r_2}$ terisi oleh silinder melingkar dengan panjang L dan konstanta dielektrik K (volume yang tersisa adalah celah yang diisi udara.) (a) Berapakah kapasitansinya? (b) Berapakah nilai E, P, dan D pada jarak r dalam dielektrik tersebut ($r_1 < r_2 < r_3$)? Pada celah udara ($r_3 < r < r_2$)? Asumsikanlah sebuah beda potensial V di antara r_1 dan r_2 . (c) Berapakah kerja mekanis yang harus dilakukan untuk memindahkan silinder dielektrik sementara harus mempertahankan beda potensial konstan antara r_1 dan r_2 ?

JAWAB:

(a) Misalkanlah, λ adalah muatan per satuan panjang pada silinder dengan jari-jari r_1 . Dari

hukum Gauss:(2)

Beda potensial pada silinder: $V = \int_{r_1}^{r_3} E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{K} \ln \frac{r_3}{r_1} + \ln \frac{r_2}{r_3} \right)$ (3)

Dari persamaan ini kita dapat memperoleh kapasitansi: $C = \frac{\lambda L}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\frac{1}{K} \ln \frac{r_3}{r_1} + \ln \frac{r_2}{r_3}}$ (4)

(b) Dari persamaan (3) diperoleh densitas muatan: $\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\frac{1}{K} \ln \frac{r_3}{r_1} + \ln \frac{r_2}{r_3}}$ (5)

Dari hukum Gauss:

$$\frac{\text{gaya listrik}}{\text{gayagravitasi}} = \frac{(4,8 \times 10^{-10})^2}{10^{-27} \times 10^{-27} \times 2000 \times 6,67 \times 10^{-8}} \square 10^{39} \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 Kr} \text{ untuk } r_1 < r < r_3 \quad \text{atau}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ untuk } r_3 < r < r_2 \text{(6)}$$

Sehingga dapat ditentukan pergeseran dalam medium dielektrik:

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad r_1 < r < r_2$$

Dan polarisasi:

$$P \equiv D - \epsilon_0 E = \frac{(K-1)\lambda}{2\pi Kr} \quad r_1 < r < r_3$$

$$= 0 \quad r_3 < r < r_2.$$

(c) Saat beda potensial di antara dua silinder itu dibuat konstan, sistem tidak dapat terus bertahan dalam keadaan terisolasi. Harus ada beberapa sumber muatan (batere, misalnya) untuk memberikan energi. Misalkan C' adalah kapasitansi sistem tanpa ada material dielektrik. Dari persamaan (4) kita peroleh:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \text{(9)}$$

Usaha yang diperlukan $= \frac{1}{2} C' V^2 - \frac{1}{2} C V^2 - (Q' - Q) V$, di mana Q' adalah muatan total pada salah satu silinder. Dengan menggunakan $Q' = C' V$, kita peroleh:

$$\text{Usaha yang diperlukan} = \frac{V^2}{2}(C - C') = \frac{V^2}{2} 2\pi\epsilon_0 L \left(\frac{1}{\frac{1}{K} \ln \frac{r_3}{r_1} + \ln \frac{r_2}{r_3}} - \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right). \text{ Hasil ini diperoleh}$$

setelah substitusi pers. (4) ke pers. (9).

8. Berapakah distribusi muatan dari potensial listrik simetri bola, $V(r) = \frac{e^{-\lambda r}}{r}$?

JAWAB:

Untuk $r \neq 0$ persamaan Poisson dalam koordinat bola adalah

$$\nabla^2 V \equiv \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} rV(r) + \Lambda V(r) = -4\pi\rho(r) \dots\dots\dots(1)$$

di mana Λ adalah operator diferensial yang bergantung terhadap sudut. Untuk sebuah potensial simetri bola, $\Lambda V(r) = 0$. Dengan menggunakan persamaan potensial yang sudah diketahui dari soal,

dapat ditentukan: $\rho(r) = -\frac{1}{4\pi r} \frac{d^2}{dr^2} e^{-\lambda r} = \frac{-\lambda^2 e^{-\lambda r}}{4\pi r}$ **untuk** $r \neq 0$.

Untuk $r \rightarrow 0$, $V = \frac{e^{-\lambda r}}{r} \rightarrow \frac{1}{r}$.

karena $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$, **maka** $\rho(\mathbf{r}) = \delta(r) - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{4\pi r}$. Ketika $r \rightarrow 0$, hanya suku $\delta(r)$ yang

berkontribusi terhadap muatan total karena volume proporsional dengan r^3 .

9. Tentukanlah rasio antara gaya gravitasi dan gaya listrik pada proton dan elektron!

JAWAB:

$$\frac{Q}{C/N} = N \frac{Q}{C} = NV \text{ karena } V = \frac{Q}{C} = \frac{\text{muatan pada setiap kapasitor}}{\text{kapasitansi pada setiap kapasitor}}.$$

di mana konstanta-konstanta yang digunakan adalah:

$e = 4,8 \times 10^{-10}$ **esu**,

$m_p \approx 2000m_e$,

$m_e \sim 10^{-27}$ **gm**,

$G = 6,67 \times 10^{-8}$ **dalam satuan cgs**.

10. Berapakah medan magnet di dalam kawat lurus, panjang, dan seragam dengan jari-jari R yang membawa arus I?

JAWAB:

Dengan menggunakan $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \frac{r^2}{R^2}$, kita memperoleh $\vec{B} = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I$.

11. Sebuah muatan titik q berada pada jarak d dari sebuah bidang yang bermuatan. Berapakah besar energi yang diperlukan untuk memindahkan muatan itu ke suatu titik yang jauhnya tak hingga dari bidang bermuatan?

JAWAB:

Energi potensial di antara sebuah muatan titik q dan sebuah bidang adalah setengah dari energi untuk muatan titik +q dan -q yang terpisahkan oleh jarak 2d. Oleh karena itu, kita mempunyai $E = -\frac{q^2}{4d}$.

12. Hitunglah energi elektrostatik dari tiga buah muatan q, -q, dan q yang ditempatkan pada vektor-vektor sebuah segitiga samasisi yang panjang sisinya a!

JAWAB:

$$E = \frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{a} = -\frac{q^2}{a}.$$

13. Bagaimanakah ketergantungan potensial listrik dari sebuah dipol listrik terhadap jarak r dari dipol tersebut?

JAWAB:

$\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \propto \frac{1}{r^2}$. Artinya, potensial listrik terhadap jarak r dari sebuah dipol sebanding dengan (1/r) kuadrat.

14. Berapakah potensial listrik di dalam kulit bola bermuatan yang terisolasi dan bermuatan Q. Jari-jari kulit bola itu adalah R?

JAWAB:

Potensial listrik di dalam bola konduktor adalah $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$.

15. Misalkan sebuah rangkaian LC paralel beroperasi pada frekuensi ω di bawah frekuensi resonansinya, ω_0 . Apakah reaktansinya bersifat kapasitif atau induktif?

JAWAB:

$$\text{Reaktansi adalah } \frac{1}{Z} = \frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega C}} = \frac{1 - \omega^2 CL}{i\omega L} \text{ atau } Z = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 CL}.$$

Karena $\omega^2 < \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ maka Z dapat ditulis sbb.

$$Z = \frac{i\omega L}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \text{ yang mana rangkaian ini bersifat induktif.}$$

16. Berapakah gaya pada sebuah dipol listrik, yang besar dipol listriknya P, dalam sebuah medan listrik seragam E?

JAWAB:

$$F = 0.$$

17. Misalkan, ada N kapasitor identik yang dihubungkan secara paralel ke suatu beda potensial V. Berapakah beda potensial yang dipeoleh ketika kapasitor-kapasitor tersebut dihubungkan secara seri? Muatan di dalam kapasitor dibiarkan konstan.

JAWAB:

$$\text{Kapasitansi akhir adalah } \frac{C}{N}, \text{ beda potensial adalah } \frac{Q}{C/N} = N \frac{Q}{C} = NV$$

$$\text{karena } V = \frac{Q}{C} = \frac{\text{muatan pada setiap kapasitor}}{\text{kapasitansi pada setiap kapasitor}}.$$